ASSOCIATION FRANCAISE POUR LE CONTROLE INDUSTRIEL DE QUALITE

A.F.C.I.Q.

6, rue Royale - PARIS 8ème

CONFERENCE - DISCUSSION

"POLITIQUES OPTIMALES D'ENTRETIEN ET DE REMPLACEMENT DANS LES SYSTEMES A PLUSIEURS ELEMENTS"

par M. R. RADNER
Professeur d'Economie et de Statistique
à l'Université de Californie (Berkeley) - U.S.A.

Exposé présenté le 10 Avril 1962 à la Salle Chaillot (C.N.P.F.) - 31, avenue Pierre 1er de Serbie - Paris 16ème

Résumé : L'auteur propose, pour les systèmes comportant plusieurs éléments, une classe de politiques d'entretien, où les décisions de remplacement ou d'inspection d'un élément sont fonction des états des autres éléments.

Il donne des exemples d'application à l'entretien préventif et aux "modèles de disponibilité".

TABLE DES MATIERES

*

* *

Introduction

Pour un appareil comportant plusieurs éléments qui sont soumis à des pannes aléatoires, la politique d'entretien d'un élément peut être fonction des autres éléments. Supposons par exemple, qu'il y ait des "économies d'échelle" dans le remplacement : lorsque le coût du remplacement simultané de plusieurs éléments est inférieur à la somme des coûts individuels de remplacement, on peut être tenté, quand un élément tombe en panne, d'en remplacer quelques autres en même temps, si ceux-ci sont assez usés.

Dans cet exposé, je poserai quelques problèmes de ce genre, et esquisserai les solutions. Les problèmes seront divisés en deux groupes : problèmes d'entretien préventif, et problèmes de disponibilité ("preparedness"). Dans chaque cas, on trouve la solution a une forme assez simple, avec peu de paramètres. Je terminerai, en donnant un exemple des méthodes de calcul de ces paramètres, par la programmation dynamique ("dynamic programming"). De toute façon, vous verrez qu'on n'a fait que commencer dans ce domaine et qu'il reste encore beaucoup à faire.

1.- PROBLEME 1 : Remplacement préventif d'un appareil à un élément.

Il sera utile d'introduire quelques idées de base dans le cadre d'un problème de remplacement préventif d'un appareil à un seul élément.

Considérons un appareil composé d'un seul élément, soit :

- c_1 le coût de remplacement de l'élément
- c_p le coût supplémentaire dû au fait que l'élément tombe en panne (nous l'appelons désormais coût de panne)
- x l'âge de l'appareil (x entier).

La probabilité qu'a l'appareil de tomber en panne à l'âge x est $f(x)$. Posons :

$$R(x) = \sum_{x}^{\infty} f(z) ;$$

cette fonction est appelée fonction de fiabilité (Reliability) ou fonction de survie de l'appareil.

On définit le taux d'avarie de l'appareil par

$$\rho(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x-1)}$$

C'est la probabilité conditionnelle pour que l'appareil étant en bon état avant l'âge x, tombe en panne à l'âge x.

Pour la plupart des appareils, $\rho(x)$ est constant ou croissant. Il est à peu près constant pour beaucoup d'appareils électroniques, et souvent croissant pour les appareils mécaniques. Quand $\rho(x)$ est croissant, on dit que la machine s'use (Ex. : cas où $f(x)$ est une distribution gaussienne).

Les cas où $\rho(x)$ est décroissant sont des cas singuliers.

Si $\rho(x) = \rho$ est constante, on a :

$$R(x) = (1 - \rho)^x$$

On dit alors que l'âge auquel survient la panne a une distribution géométrique. Dans ces cas, on a intérêt à ne remplacer l'appareil que quand il tombe en panne, car tant qu'il ne tombe pas en panne, il est "comme neuf" (en effet :

$$\rho(x) = \rho(o) = \rho).$$

Supposons que $\rho(x)$ croisse jusqu'à 1. Il est intuitif que pour un coût de panne $c_P > 0$, il existe un âge N de l'appareil, auquel il vaut mieux remplacer l'appareil tout de suite plutôt que d'attendre qu'il soit en panne pour le faire. Nous parlerons plus loin (paragraphe 7) du calcul de la valeur optimale de N.

2.- PROBLEME 2 - ENTRETIEN PREVENTIF D'UN APPAREIL A DEUX ELEMENTS

Considérons un appareil composé de deux éléments (1) et (2). Ces éléments peuvent tomber en panne indépendamment l'un de l'autre. L'appareil est en panne quand un élément au moins est en panne. On peut remplacer un élément à la fois ou les deux ensemble, soit :

- c_P le coût de panne,
- c_1, c_2 les coûts de remplacement de (1) et (2) respectivement,
- c_{12} le coût de remplacement des deux éléments ensemble.

On a en général

$$0 < c_i \leqslant c_{12} \leqslant c_1 + c_2$$

Si $c_{12} < c_1 + c_2$, on dit qu'il y a des <u>économies d'échelle</u> dans le remplacement.

C'est le cas où l'on est tenté, quand (2), par exemple, tombe en panne et que (1) est assez âgé, de les remplacer tous les deux. Il est évident qu'il ne faut pas se laisser guider par cette seule considération, mais qu'il faut chercher une politique d'entretien qui permette de réaliser un coût minimum.

A l'époque t, le coût γ_t, (variable aléatoire) peut prendre des valeurs suivantes :

$$\gamma_t = c_1, \ c_2, \ c_{12}, \ c_1 + c_P, \ c_2 + c_P, \ c_{12} + c_P$$

On cherche à minimiser l'espérance mathématique de la somme des coûts actualisés, c'est-à-dire de

$$E\left[\sum_0^\infty a^t \ \gamma_t\right] \qquad o < a < 1$$
a facteur d'actualisation.

La politique optimale pour ce problème n'est pas connue dans le cas général même si ρ_1 et ρ_2 sont tous les deux croissants. Mais il y a deux cas particuliers où les solutions sont connues : (1), si ρ_2 est constant, et (2), si le coût de panne C_P est nul.

Considérons le premier cas. Supposons que ρ_2 soit constant. On a intérêt à ne remplacer l'élément (2) que quand il est en panne. On est donc ramené à déterminer une politique de remplacement pour l'élément (1). Soit x l'âge de (1) on démontre alors qu'il existe deux nombres non négatifs n et N, $n \leqslant N$, tels que :

si l'on a :

a/ $x < n$ on remplace (1) seulement en cas de panne de (1)
b/ $n \leqslant x < N$ on remplace (1) quand (1) ou (2) tombe en panne
c/ $N \leqslant x$ on remplace (1) sans tarder, qu'il soit en panne ou non.

Appelons cette politique la politique (n,N).

Si $c_1 + c_2 = c_{12}$, alors $n = N$, et on dit qu'on a une politique "périodique" pour chaque élément, comme dans le Problème 1 ci-dessus.

Par contre, si $n = 0$, on remplace (1) chaque fois que (2) tombe en panne. Enfin, si $N = \infty$, on ne fait pas de remplacement préventif pour (1), c'est-à-dire qu'on ne remplace (1) que quand il tombe en panne.

Considérons maintenant le deuxième cas, où le coût de panne $cp = 0$ et ρ_1 et ρ_2 sont croissants. Dans ce cas on a intérêt à ne pas faire de remplacement préventif, parce qu'il n'y a pas un coût de panne à éviter. Néanmoins, à cause des économies d'échelle, on est parfois tenté de remplacer les deux éléments ensemble. En effet, on démontre que, pour la politique optimale, il existe deux nombres n_1 et n_2 tels que :

a) Si (1) tombe en panne quand l'élément (2) a l'âge x_2, on remplace (1) seul si $x_2 < n_2$, et (1) et (2) ensemble si $x_2 \geqslant n_2$

b) De même, si (2) tombe en panne quand l'élément (1) a l'âge x_1, on remplace (2) seul si $x_1 < n_1$, et (1) et (2) ensemble si $x_1 \geqslant n_1$

Pour la démonstration de ce résultat, et la méthode permettant de calculer n_1 et n_2, voir BOUZITAT.

3.- PROBLEME 3 - Remplacement d'un appareil destiné à être disponible ("Preparedness Model") - Cas de deux éléments.

Considérons maintenant un appareil dont le but est d'être prêt ou disponible autant que possible ; par exemple, les systèmes d'alarmes, les systèmes de détention, les armes défensives.

Commençons en considérant un cas assez particulier, celui d'un appareil à deux éléments qui soit conforme aux hypothèses suivantes.

A - L'élément (1) a une fonction de survie $R(x)$ quelconque décroissante jusqu'à zéro quand x croît. L'état de (1) n'est connu qu'à l'époque où il est remplacé.

B - L'élément (2) a un taux d'avarie ρ_2 constant et est continuellement surveillé.

C - Les avaries des deux éléments sont indépendantes en probabilité.

D - Les coûts de remplacement sont :

c_i pour un remplacement de i seul $(i = 1,2)$

c_{12} pour un remplacement de 2 éléments ensemble

$$c_{12} \leqslant c_1 + c_2$$

E - A chaque période durant laquelle l'appareil est en bon état, correspond un gain égal à V.

F - On peut remplacer les éléments aussitôt qu'une panne est découverte.

Comme ρ_2 est constant et que l'élément (2) est surveillé, on est ramené à déterminer une politique de remplacement pour l'élément (1). On ne peut remplacer (1) trop souvent, car chaque remplacement implique un coût. On ne peut pas non plus le remplacer trop peu souvent car on risque de le trouver en panne quand on a besoin de l'appareil. Notons que l'appareil peut être en panne, bien que ce fait reste inconnu jusqu'au prochain remplacement de l'élément (1).

On démontre que dans ce cas la politique optimale est encore la politique (n,N).

4.- <u>PROBLEME 4</u> - <u>Généralisation du Problème 3</u>.

On peut généraliser le modèle de disponibilité précédent de la façon suivante, en considérant un appareil comportant plusieurs éléments surveillés, et en tenant compte des <u>durées</u> des actions de remplacement.

On considère un appareil composé de $(M + 1)$ éléments tels que :

A' - L'élément (0) a une fonction de survie $R(x)$ quelconque. $R(x)$ décroît jusqu'à zéro quand x croît. On ne connaît l'état de l'élément (0) qu'à l'époque où il est remplacé.

B' - L'élément (i) $(i = 1,2, \dots, M)$ a un taux d'avarie constant ρ_i et est continuellement surveillé.

C' - Les pannes des différents éléments sont indépendantes en probabilité. Nous raisonnons à des instants t du temps continu ; à chaque instant la probabilité pour qu'il y ait une panne simultanée de 2 éléments (ou davantage) est alors négligeable.

D' - Les coûts de remplacement sont :

c_i pour (i) seul $(i = 0, 1, 2, \dots M)$

C_{0i} pour (0) et (i) ensemble $(i = 1, 2, \dots M)$.

E' - Les durées des remplacements sont :

K_i pour (i) seul $(i = 0, 1, \dots M)$

K_{0i} pour (0) et (i) ensemble $(i = 1, 2, \dots M)$.

On suppose qu'aucune panne ne survient durant un entretien.

F' - A chaque unité de temps durant laquelle l'appareil est en bon état, correspond un gain égal à $V > 0$.

Soit x l'âge de l'élément (0), et soit y l'état du reste du système, c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{ll} y = 0 & \text{si tous les éléments (i) sont en bon état} \\ y = i & \text{si l'élément (i) est en panne} \end{array}\right) \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

On démontre que la politique optimale est caractérisée par $(M + 1)$, nombres non négatifs $n(i)$, $i = 0, \ldots, M$; tels que, à une époque donnée,

(a) Si $y = 0$ on ne fait rien pour $x < n(0)$, et on remplace l'élément (0) pour $x \geqslant n(0)$.

(b) Si $y = i$ $(i = 1, \ldots, M)$, on remplace l'élément (i) seul pour $x < n(i)$ et on remplace les éléments (0) et (i) ensemble pour $x \geqslant n(i)$.

En outre, si $c_{0i} < c_0 + c_i$ pour $i = 1, \ldots, M$ et si $K_{0i} < K_0 + K_i$ on a alors : $n(i) < n(0)$.

Remarquons que le Problème 3 correspond au cas où $M = 1$ et où les durées de remplacement K_i, K_{0i} sont nulles. Dans ce cas, $n(0) = N$ et $n(1) = n$.

5.- PROBLEME N° 5 - L'Inspection dans le Modèle de Disponibilité.

Supposons que dans le Problème 4 on inspecte l'élément (0) avant son remplacement, et qu'on ne remplace l'élément que si une panne est découverte. En général, une inspection exige un certain temps, un certain coût, et peut être la cause même d'une panne de l'élément inspecté.

Nous ne considérerons ici que le cas de deux éléments $(M = 1)$ où l'élément (0) a un taux d'avarie ρ_1 constant. Les problèmes plus généraux ne sont pas encore résolus. Si l'élément (0) a un taux d'avaire constant, alors chaque inspection entraîne un renouvellement de l'élément, puisque : ou l'élément est découvert en bon état, et donc "comme neuf", ou il est découvert en panne, et donc remplacé. Par contre, si l'élément (0) n'a pas un taux d'avarie constant, chaque inspection n'entraîne pas un renouvellement de (0).

Ainsi, ajoutons aux hypothèses (A') - (F') du paragraphe 4, les hypothèses suivantes :

(G') La durée d'une inspection est H. Durant l'inspection l'appareil n'est pas disponible.

(H') Il y a un coût d'inspection C_1.

(I') Si (0) est en bon état avant l'inspection, sa probabilité de survivre à l'inspection est σ.

De plus, ajoutons à (A') l'hypthèse que le taux d'avarie de l'élément (0) est constant.

On démontre alors que dans le cas de deux éléments $(M = 1)$ la politique optimale d'inspection est du type (n,N).

Si la probabilité σ de survivre à l'inspection est égale à zéro, alors on retombe dans le cas de remplacement pur.

6.- RENOUVELLEMENT DANS UN ENVIRONNEMENT MARKOVIEN.

Le Problème 4 est un cas particulier de la situation suivante. Soit un environnement dont les états possibles y dans Y sont tels que la séquence (y_t) soit une chaîne de Markoff (t est le temps).

Supposons qu'à une époque quelconque t on puisse prendre soit une décision D_0, soit une décision D_1. Les conséquences de D_0 et de D_1 à l'époque t sont les gains $V_0(x,y)$ et $V_1(y)$, respectivement, où x est le nombre de périodes écoulées depuis la dernière décision D_1. On veut choisir la politique qui rend maximum l'espérance mathématique de la somme des gains actualisés (gain attendu). On peut interpréter la décision D_1 comme une action de renouvellement.

Nous pouvons définir toute politique par une fonction $\varphi(x,y)$ de x et de y. Nous appelons politique monotone, toute politique $\varphi(x,y)$ telle que : Pour chaque $y \in Y$, il existe un nombre $n(y)$ tel que

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant x < n(y) \qquad \text{(Décision } D_0\text{)} \\ 1 & \text{pour } n(y) \leqslant x \qquad \text{(Décision } D_1\text{)} \end{cases}$$

On démontre :

Théorème : Si quelque soit $y_1 \in Y$, $V_0(x,y_1)$ est une fonction décroissante de x, alors toute politique optimale est une politique monotone.

7.- CALCUL DES PARAMETRES D'UNE POLITIQUE OPTIMALE.

Dans le cas d'un problème d'entretien préventif, par exemple, nous savons que la politique optimale est du type (n,N). Il nous reste à déterminer les paramètres $\hat{n}$ et $\hat{N}$ qui caractérisent cette politique. Nous pouvons utiliser, pour cela, la méthode directe ou la méthode itérative de la programmation dynamique.

Dans la méthode directe, on prend une politique quelconque φ, du type (n,N). Cette politique est complètement définie par le couple (n_φ, N_φ) qui lui correspond. On calcule ensuite le gain attendu G correspondant à la politique (ou bien le coût attendu) en fonction de n et de N :

$$G = G(n_\varphi, N_\varphi)$$

La politique optimale $\hat{\varphi}$ caractérisée par le couple $(\hat{n}, \hat{N})$ est la politique qui maximise $G(n_\varphi, N_\varphi)$.

La méthode directe est en général d'un emploi assez difficile. On l'a utilisée pour des modèles de disponibilité avec ρ_1 et ρ_2 constants (voir RADNER et JORGENSON), et pour quelques problèmes d'entretien "périodique".

Dans la méthode itérative de la programmation dynamique, on commence avec une politique initiale φ_0, et on calcule une séquence $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ de politiques, telle que chaque politique φ_k est meilleure que la précédente et telle que φ_k tend vers la politique optimale quand k croît sans borne.

Je vais illustrer maintenant la méthode itérative. Pour simplifier l'exposé, je m'en tiendrai au problème de remplacement préventif d'un appareil comportant un seul élément, bien que pour un problème aussi simple, la méthode directe soit souvent plus efficace. Cependant, même pour ce problème, la méthode itérative pourrait être utile si la fonction de survie $R(x)$ n'était donnée que numériquement.

Reprenons donc le problème du paragraphe 1. Pour la politique initiale φ_0 il faut prendre une politique telle que l'on puisse calculer le coût attendu à partir de l'âge $x = 0$ de l'appareil. Donc il est commode de prendre une politique assez simple. Choisissons, ainsi, pour φ_0 la politique définie par $N = \infty$; autrement dit, selon φ_0, on ne fait pas de remplacement préventif.

Soit $L_0(0)$ le coût moyen entraîné par φ_0, à partir d'une époque où l'appareil est neuf, et soit T l'époque de la première panne (et donc du remplacement) de l'appareil. T est une variable aléatoire. Il est évident que :

$$L_0(0) = E\left\{a^T\left[c_P + c_1 + L_0(0)\right]\right\}$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} a^t\left[c_P + c_1 + L_0(0)\right] f(t)$$

$$= \left[c_P + c_1 + L_0(0)\right] \bar{a}$$

où

$$\bar{a} = \sum_{t=1}^{\infty} a^t f(t)$$

Donc

$$L\ (0) = \frac{(c_P + c_1)\ \bar{a}}{1 - \bar{a}}$$

Or, soit φ_1 la meilleure politique, étant donné qu'après le premier remplacement de l'appareil on utilisera la politique φ_0. Pour calcule φ_1, désignons par $L_1(x)$ le coût moyen entraîné par φ_1, à partir d'une époque où l'appareil a l'âge x et est encore en marche. On calcule $L_1(x)$ par recurrence de la façon suivante. A chaque époque, il existe deux actions possibles. Si l'appareil est encore en marche : D_0, "ne rien faire"; sinon : D_1 "remplacer l'appareil".

Le coût moyen actualisé de D_0 est :

$$a\left\{\rho(x)\left[c_P + c_1 + L_0(0)\right] + \left[1 - \rho(x)\right] L_1\ (x+1)\right\}$$

Le coût moyen de D_1 est :

$$c_1 + L_0(0)$$

Donc

$$(1) \qquad L_1(x) = \text{minimum}\left\{\begin{array}{l} a\left\{\rho(x)\left[c_P + c_1 + L_0(0)\right] + \left[1 - \rho(x)\right] L_1(x+1)\right\} \\ c_1 + L_0(0)\end{array}\right.$$

On démontre que $L_1(x)$ croît avec x et que $L_1(x) = c_1 + L_0(0)$ pour x assez grand (si $\rho(x)$ croît jusqu'à 1).

Donc on peut calculer $L_1(x)$ par récurrence sur x (avec x décroissant), et on arrive enfin à $L_1(0)$.

Soit N_1 le plus petit nombre t tel que $L_1(t) \geqq c_1 + L_0(0)$; autrement dit, selon la politique φ_1, on remplace l'appareil aussitôt qu'il arrive à l'âge N_1 sans panne (1).

Note - (1) : En effet, quand x croît, $\rho(x)$ croît jusqu'à 1, et la conséquence de la décision D_0 tend vers a $\left[c_p + c_1 + L_0(0)\right]$: il s'agit alors de démontrer que

$$a \left[c_p + c_1 + L_0(0)\right] > c_1 + L_0(0)$$

ou encore,

$$c_1 + L_0(0) < \left(\frac{a}{1-a}\right) c_p = \sum_{t=1}^{\infty} a^t c_p$$

Mais on peut supposer que cette dernière inégalité est vérifiée car, sinon l'appareil est si mauvais qu'il est préférable d'accepter le coût de panne c_p à chaque époque que de remplacer l'appareil quand il tombe en panne !

Alors, puisque pour x assez grand,

$$L_1(x+1) = c_1 + L_0(0) ,$$

la conséquence de la décision D_0 est

$$a \left[\rho(x) c_p + c_1 + L_0(0)\right] \text{ qui croît avec } x .$$

Donc, pour démarrer le calcul par récurrence, il suffit de prendre x tel que

$$a \left[\rho(x) c_p + c_1 + L_0(0)\right] > c_1 + L_0(0)$$

ou bien, tel que

$$\rho(x) > \left(\frac{1-a}{a\ c_p}\right) \left[c_1 + L_0(0)\right]$$

De cette façon, on continue en définissant φ_2 à partir de φ_1 , φ_3 à partir de φ_2 , etc..., et on obtient la suite correspondante, N_1, N_2, etc... On démontre que φ_k tend vers la politique optimale, c'est-à-dire que N_k tend vers la valeur optimale de N .

D'ailleurs, φ_k peut s'interpréter comme la politique optimale, étant donné qu'après le premier remplacement, on utilisera la politique φ_{k-1}, qu'après le deuxième remplacement on utilisera la politique φ_{k-2}, etc..., et qu'après le $k^{\text{ième}}$ remplacement, on utilisera la politique φ_0 .

De façon analogue, on peut calculer les valeurs optimales pour les autres problèmes dont j'ai parlé. Bien entendu, les équations de récurrence qui correspondent aux conditions (1) ci-dessus seront plus compliquées. De toute façon, les calculatrices électroniques sont bien adaptées pour un tel calcul itératif.

8.- NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

Les résultats détaillés relatifs au problème d'entretien préventif d'un appareil à deux éléments dans le cas où le coût de panne est égal à zéro sont donnés par (BOUZITAT) dans un article qui est sur le point de paraître (voir Références bibliographiques).

Pour les problèmes de remplacement et d'inspection dans le modèle de disponibilité, dans le cas de deux éléments où on tient compte des durées d'entretien (mais pas des coûts), voir (RADNER et JORGENSON).

Les autres résultats des paragraphes 2 - 6 ne sont pas encore publiés.

Sur l'analyse des problèmes d'entretien préventif pour un appareil à un élément, on peut consulter (BARLOW et HUNTER), (CAMPBELL), (DRENICK), (FLEHINGER), (WEISS), (WELKER) et (WELKER et BRADLE). De plus, (KLEIN et ROSENBERG) donnent un sommaire de la littérature à ce sujet jusqu'à 1960.

Les études relatives aux modèles de disponibilité sont plus récentes. (SAVAGE) et (DRENICK) donnent des résultats pour un appareil à un élément, et (KAMINS) donne une analyse des politiques"périodiques" pour les systèmes de plusieurs éléments. (McGLOTHLIN et BEAN) proposent un modèle pour comparer des politiques alternatives données pour un problème d'inspection et de remplacement d'une fusée à plusieurs éléments.

Le problème de la surveillance et du remplacement des stocks sujets à détérioration est lié aux problèmes des modèles de disponibilité dont j'ai parlé. (SOLOMON et DERMAN) ont étudié plusieurs politiques de surveillance par échantillonnage.

REFERENCES

BARLOW, R and L. - HUNTER - Optimum Preventive Maintenance Policies Operations Res. 1960, 8 (I), 90-100

BOUZITAT, Z. - Choix d'une politique d'exploitation dans un ensemble industriel complexe (Cahiers du Bureau Universitaire de Recherches Opérationnelle - N° 4, 1962)

CAMPBELL, N.R. - The Replacement of Perishable Members of a Continually Operation System, J. Roy. Stat. Soc. 7 (suppl.) 110 - 30

DRENICK, R.F. - Mathematical aspects of the reliability problem J. Soc. for Indust. and Appl. Math. 1960, 8 (I), 125-49

FLEHINGER, B.I.- Systems reliability as a function of system Age : Effects of Intermittent Component usage and Periodic Maintenance, Operations Research, 1960, 8 (I), 30 - 44

KAMINS, M. - Determining checkout intervals for systems subject to random failures, The Rand corporation, Santo Monica (California) - Research Memorandum RM - 2578, June 15, 1960.

KLEIN, M. and L. ROSENBERG - Deterioration of inventory and equipment Naval Res. Logist. Quart. 1960, 7 (I), 49 - 62

McGLOTHLIN, W.H. and E. BEAN - An analytical model for developing optimal ballistic missile policies, The Rand Corporation, Santo Monica (Calif.) Paper P - 1696, May 13, 1959

RADNER R. and D.W. JORGENSON - Opportunistic maintenance of Stochastically failing equipment - Studies in Applied Probability and Management Science (Arrow, Karlin and Scarf, Editors) Stanford : Stanford Univ. Press, 1962 (à paraître).

SAVAGE I.R. - Cycling Naval Res. Logist. Quart. 1956, 3 (3), 163-75

SOLOMON H. and C. DERMAN - The development and evaluation of Surveillance sampling plans, Management Science. 1958, 5 (I), 72-88

WEISS G.H. - On the theory of replacement of machinery with a random failure time, Naval Res. Logist. Quart. 1956, 3 (4), 279-94

WELKER, E.L. - Relationship between equipment reliability preventive maintenance policy and operating costs, ARING Research corporation, Washington, D.C. ARING Research Monograph N° 7, February 13,1959

WELKER, E.L. and E.C. BRADLEY - A model for scheduling maintenance utilizing measures of equipment performance, ARING Research Corporation, Washington Corporation, Washington D.C. ARING Res. Monograph, N° 8, October I, 1959.

D I S C U S S I O N

M. Morice — Au cours de cet exposé si riche de substance, M. Radner nous a fait parcourir rapidement le champ si vaste, et encore mal défriché certainement des problèmes de la Reliability. Vous aurez certainement le désir de poser à M. Radner quelques questions auxquelles, il se fera, je suis sûr, un plaisir de répondre pour satisfaire votre curiosité dans ce domaine.

Un auditeur — Vous avez parlé tout à l'heure d'inspection, c'est-à-dire en rattachant cette notion à l'entretien préventif ; qu'entendez-vous exactement par inspection ? Et pensez-vous qu'une inspection n'est valable que dans la mesure où elle donne une information sur la vie future de la pièce ou bien au contraire qu'il s'agit d'un test pour savoir simplement si la pièce est bonne ou mauvaise ?

M. Radner — Eh ! bien, il y a plusieurs sortes d'inspections. J'ai parlé de l'inspection qui donne une information sur l'appareil, qui permet de savoir s'il est bon ou mauvais. A partir de cela, on peut avoir des renseignements sur l'avenir, parce que la fonction de survie, à partir d'un âge X, où l'on constate que l'élément est en bon état est :

$$\frac{R\ (x + T)}{R\ (x)}$$

c'est la probabilité conditionnelle. Alors cette fonction donne la probabilité des pannes dans l'avenir étant donné que l'élément est en bon état de marche à l'âge X.

Même auditeur — Cela n'offre aucun intérêt pour un taux constant d'avarie ?

M. Radner — Alors, avec un taux d'avarie constant, si l'inspection permet de découvrir que l'élément est en bon état... c'est comme neuf. Mais si le taux d'avarie n'est pas constant, alors l'élément n'est pas comme neuf, il y a une fonction de survie conditionnelle qui n'est pas égale à la fonction de survie à partir de l'âge zéro. Mais il faut dire qu'il y a des inspections qui ne sont pas tout à fait sûres; c'est-à-dire qu'on ne peut pas inspecter tous les aspects d'un appareil. Alors si, par exemple, une inspection est positive, c'est-à-dire si l'on n'a découvert aucune panne, il peut néanmoins rester une panne dans une partie de l'appareil. Mais, il y a d'autres cas d'inspection. J'ai parlé seulement des appareils qui sont, soit bons, soit mauvais ; mais souvent on peut voir le niveau des détériorations de l'appareil. C'est-à-dire que l'on a une mesure de la "performance" de l'appareil, mais en général cette mesure décroît de façon continue et on dit, d'une façon plus ou moins arbitraire quand cette mesure tombe à un niveau inférieur à un certain niveau critique, que l'appareil est tombé en panne. Mais ce niveau critique est souvent arbitraire.

Un auditeur — Si l'on cherche à étendre l'étude au cas des ensembles à trois éléments, sans faire d'hypothèses sur les lois de survie, est-on arrêté par des difficultés théoriques supplémentaires, ou bien est-ce la masse des calculs qui est rebutante ?

M. Radner — Cela dépend du problème dont vous parlez. Mais prenons le cas d'entretien préventif d'état général; dans ce cas là, avec deux éléments, on ne connaît pas la politique optimale. C'est peut-être assez compliqué, trop compliqué pour être pratique, parce que si la politique est trop compliquée, la gestion est trop coûteuse.

Même auditeur — Oui, mais justement, si on peut craindre que la politique optimale soit compliquée et que de toute façon on ne sait pas la trouver, ne pourrait-on pas essayer d'optimiser une politique du genre système (n,N).

M. Radner — Oui, je crois.

Même auditeur — Il n'y a pas d'études de faites dans ce domaine ?

M. Radner — Je connais une application militaire, dont je ne peux pas parler. Mais, dans ce cas il y a des coûts assez particuliers. On est resté avec une politique assez simple, analogue à la politique (n,N), et on a cherché les valeurs optimales de ces paramètres. Je crois que c'est une façon de procéder assez utile, parce que les politiques optimales deviennent très compliquées.

Un auditeur — Si le nombre des éléments devient très grand, la théorie ne montre-t-elle pas que l'on arrive à une politique, en fait, (n,N) ? Je pense en particulier à la politique de maintenance des avions.

M. Radner — Oui. Dans la pratique actuelle, on ne cherche pour chaque élément qu'un âge de remplacement ou de l'entretien obligatoire. Dans le cas dont vous avez parlé, il conviendrait de rechercher des politiques qui soient à la fois meilleures que cela et pas trop compliquées.

Par exemple, on pourrait traiter tour à tour chaque élément comme l'élément 0 dont j'ai parlé, en considérant alors le reste du système comme s'il s'agissait d'un remplacement aléatoire.