Cahiers d'Econometrie,
Vol. 4 (1967), pp. 35-62.

FILE COPY

ÉQUILIBRE DES MARCHÉS A TERME ET AU COMPTANT EN CAS D'INCERTITUDE

par

Roy RADNER, [1]

Université de Californie, Berkeley

Le titre choisi par M. Radner permet à lui seul d'apprécier l'importance et la difficulté du problème qu'il entend résoudre; il s'agit en effet de la recherche d'un équilibre sur les « marchés à terme et au comptant en cas d'incertitude ».

Voici comment l'auteur définit le cadre de son analyse :

« Cette formulation se situe dans le cadre de la théorie générale de Debreu (1959) « et l'on peut appliquer ses théorèmes sur l'existence de l'équilibre et sur la correspondance entre équilibre et optimum ». Extension au cas « où les différents « agents peuvent avoir des structures d'information différentes ».

« Pour simplifier l'exposé, je me borne au cas de deux périodes et je suppose « qu'il n'y a d'incertitude qu'en deuxième période ».

« Un tel marché est une extension naturelle du concept du " marché statique " « au cas où l'on distingue les " biens ", non seulement selon leurs caractéristiques « physiques, mais aussi selon la date de livraison et (pour la date 2) selon l'état de « l'environnement au sommet de la livraison ».

Les hypothèses retenues pour la conduite du raisonnement se résument ainsi :

— Comportement et situation des consommateurs.

« L'hypothèse de convexité des préférences des consommateurs implique « l'absence de préférence pour le risque ».

(...) « toutes les entreprises appartiennent aux consommateurs ».

— Comportement des producteurs.

«... le comportement des producteurs ne nécessite de leur part aucune attitude « vis-à-vis du risque ».

---

[1] Les recherches dont il est rendu compte dans le présent article ont été effectuées alors que l'auteur était en mission au Centre de Recherches Mathématiques pour la Planification (CERMAP), grâce à des subventions attribuées à l'Université de Californie par la National Science Foundation et l'Office of Naval Research, et à une bourse de la Guggenheim Foundation. L'auteur tient à remercier Mlle FABRE du CERMAP et M. MALINVAUD de l'INSEE pour leurs commentaires sur une version provisoire du texte.

— Situation commune à tous les agents.

« Pendant l'évolution de l'économie les agents ne reçoivent que des informations « concernant l'environnement; ils ne reçoivent aucune information concernant « les actions des autres agents ».

— Neutralité de la monnaie.

« La monnaie et la liquidité ne jouent aucun rôle ».

Afin d'examiner le cas des marchés à terme en économie aléatoire, M. Radner procède par étapes pour ce faire, il considère en premier lieu « un marché au comptant pour chaque bien et pour chaque date », à l'exclusion de tout autre marché. Passant alors au cas général où coexistent marchés au comptant et marchés à terme, il précise les conditions qu'implique tout équilibre d'ensemble.

« De manière simplifiée, il existe un équilibre général des marchés si la struc- « ture des prix à la date 2 détermine des structures d'information pour lesquelles « les décisions à la date 1 entraînent la structure donnée des prix à la date 2 ».

A titre d'illustration, il évoque l'emploi d'index pour la conclusion des contrats de travail et pour l'émission d'emprunts. Il envisage en outre une interprétation répondant au souci de s'assurer contre les risques inhérents au caractère aléatoire des événements futurs.

Au sujet de l'équilibre susceptible de s'établir, l'auteur fait état de réserves non négligeables :

— d'une part, « il n'est pas évident qu'un équilibre du type défini plus haut « existe même sous les hypothèses classiques. La continuité des fonctions de « demande pourrait être détruite en principe, du fait que l'information dépend « de la structure des prix au comptant à la période 2 »;

— d'autre part, « on peut démontrer que, étant donné les plans y^*j des pro- « ducteurs, la bourse pour les actions $\theta ij2$ conduit à un optimum pour la répartition « entre les consommateurs des revenus aléatoires des producteurs ».

Les conclusions dégagées par M. Radner méritent une particulière attention du point de vue pratique aussi bien que du point de vue théorique :

« Dans la mesure où les événements futurs sont objectivement vérifiables, « l'extension des marchés à terme ainsi que le développement des prévisions « conditionnelles, peuvent conduire à une meilleure répartition des risques et à « une évolution de la production à la fois plus efficace, plus cohérente et plus « centralisée. Mais dans la mesure où ces événements sont " subjectifs " selon le sens « précisé dans cet article, les marchés ne semblent pas donner une solution optimale « au problème du choix des investissements en avenir aléatoire ».

R. R.

« L'adversaire à vaincre n'est plus le hasard. En revanche c'est parfois la complexité ».

« Les planificateurs ne doivent pas donner à des prévisions aléatoires une apparence de certitude qui serait contraire à la nature des choses ».

Pierre MASSÉ.
Le Plan ou l'Anti-hasard.

1. — INTRODUCTION

Jusqu'à présent, la théorie de l'équilibre concurrentiel général en avenir incertain se borne au cas où tous les agents économiques ont la même information et le seul marché envisagé est un marché à terme qui a lieu au début de l'évolution de l'économie (voir Arrow, 1953, et Debreu, 1959). Dans la présente communication, j'essaie de remplacer ces deux hypothèses par d'autres plus réalistes, et de tirer de l'analyse qui en résulte des conclusions relatives à la planification.

Depuis longtemps les économistes vantent l'économie de marché pour son efficacité quant à l'utilisation de l'information et pour son économie de communication. En effet, on prétend que la simple communication des prix peut remplacer, sans perte, la communication des données techniques et des descriptions complexes de préférences des consommateurs. Mais une étude sérieuse de l'information exige une théorie qui tienne compte de l'incertitude, et une étude des échanges d'information n'a vraiment de sens que si l'on suppose que les différents agents économiques ont des informations différentes, tout au moins avant la réalisation des échanges.

On peut facilement étendre la théorie de Debreu au cas où les agents n'ont pas forcément la même information. Mais la théorie qui en résulte exige toujours de la part des agents des pouvoirs d'imagination et de calcul qui dépassent la réalité de plusieurs ordres de grandeurs. En outre, cette théorie exige un système d'assurances et de marchés à terme, système trop complexe, trop détaillé et trop raffiné pour avoir une signification pratique.

Dans les « économies de marché » actuelles, il existe une séquence de marchés, dont chacun est constitué à la fois par des marchés au comptant, des marchés à terme et d'assurances, les marchés au comptant étant les plus importants. Dans de tels marchés, à chaque période, les prix servent de signaux dans la structure d'information des agents. Or, les agents ont intérêt à prévoir la dépendance entre les prix futurs et les événements environnants. Pour faire de telles prévisions, ils doivent en principe connaître les plans des autres agents, parce que les prix à une date donnée dépendent aussi bien des décisions antérieures, que des événements environnants.

Les agents ont donc peut-être intérêt à la réalisation d'un équilibre, qui assure non seulement la cohérence des plans individuels, mais encore celles des prévisions relatives aux prix.

On verra plus loin qu'un tel équilibre peut mener à un optimum, pourvu que les producteurs puissent s'assurer contre tous les risques relatifs à leur production en utilisant bien entendu les prévisions d'équilibre. Mais, si cette dernière condition n'est pas remplie, la théorie laisse à penser que les marchés ne sont pas capables de fournir une solution optimale au problème du choix des investissements en avenir aléatoire. Une telle situation pourrait justifier une intervention publique.

Un aspect important de cette théorie est le rôle que jouent les prix futurs dans les structures d'information des agents économiques. Je concluerai que les plans indicatifs devraient aboutir à des estimations de prix, non pas uniques, mais conditionnels par rapport aux événements futurs. Cette théorie suggère aussi que l'on devrait attribuer un plus grand rôle aux assurances sur la structure des prix futurs (ou bien aux salaires indexés, bons indexés, etc...).

2. — ENVIRONNEMENT, INCERTITUDE, INFORMATION

D'après Savage (1954), on distinguera les variables *incontrôlées (environnement)* des variables *contrôlées (décisions où actions)*. Un *état* de l'environnement est une description complète de toute une *évolution* de l'environnement. Un *événement* est un ensemble d'états. Soit S l'ensemble des états alternatifs possibles. On notera un état par s, et un événement par E. On dit qu'un événement E *se réalise* si l'un quelconque des états s appartenant à E se réalise.

Une *structure d'information* à une date donnée peut être représentée par une partition $(E_1, \ldots, E_k)$ de S. Soit par exemple un ensemble d'états dont chacun d'eux est complètement décrit par les températures aujourd'hui à Paris et Bruxelles: $s = (T_p, T_b)$; un système d'information qui donne alors la température moyenne des deux villes, divise S en une partition constituée par les ensembles $E_m = \{(T_p, T_b) : 1/2(T_p + T_b) = m\}$.

Avec cette représentation, l'information n'est jamais fausse, mais elle est parfois hors de propos (pourvu que la description de l'état de l'environnement comprenne l'état des instruments d'observation et de communication).

Soit $\mathcal{S} = \{E_1, E_2, \ldots\}$ une partition de S représentant la structure d'information d'un agent à une date donnée. Étant donné tout événement E_k dans $\mathcal{S}$, les décisions de l'agent doivent être identiques pour tout état s appartenant à E_k. C'est de cette façon que l'on tient compte de la contrainte imposée sur les décisions par la structure d'information.

On dira qu'une fonction f définie sur S est *compatible avec une partition* $\mathcal{S}$ de S si pour tout $E \in \mathcal{S}$ et tout s et $s' \in$ S

$$f(s) = f(s').$$

Étant donné une fonction f sur S, *la partition* $\mathcal{S}$ *engendrée* par f est la partition la moins fine avec laquelle f soit compatible. (Je rappelle qu'une partition $\mathcal{S}$ est dite au moins aussi fine qu'une partition $\mathfrak{R}$ si tout ensemble appartenant à $\mathfrak{R}$ appartient aussi à $\mathcal{S}$).

3. — LES VARIABLES ET CONTRAINTES « RÉELLES »

Pour mieux comprendre les différences entre les diverses hypothèses sur le fonctionnement des marchés, il est souhaitable d'isoler les aspects « réels » du modèle.

Pour simplifier l'exposé, je me borne au cas de deux périodes, et je suppose qu'il n'y a d'incertitude qu'en deuxième période. La théorie peut être généralisée facilement au cas d'un nombre fini de périodes et j'ai essayé d'adopter une notation qui suggère cette généralisation.

Soit S l'ensemble des états s de l'environnement, K le nombre (fini) d'états. Les deux périodes ou dates seront appelées 1 et 2 ou parfois « aujourd'hui » et « demain ». A chaque date il existe une liste de biens $c = 1, \ldots, C$ comprenant les biens de production et de consommation, le capital, les ressources primaires, le travail, les services, etc...

Producteurs. — Il y a n producteurs. Je noterai par a_{jc} l'input pour le producteur j du bien c à la date 1, et par $b_{jc}(s)$ l'output pour j du bien c à la date 2 en l'état s. Soit :

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{j1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{jC} \end{bmatrix}, \qquad b_j(s) = \begin{bmatrix} b_{j1}(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{jC}(s) \end{bmatrix}, \qquad b_j(.) = \begin{bmatrix} b_j(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_j(K) \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas simplifié de deux périodes, je suppose qu'il n'y a ni d'output en première période, ni d'input en deuxième période.

Un *plan de production* pour j est un couple $y_j = [-a_j, b_j(.)]$. Notons qu'un plan pour j est un vecteur dans l'espace Euclidien à $(C + KC)$ dimensions. Soit Y_j^0 l'ensemble des plans réalisables pour j du point de vue purement technique.

Consommateurs. — Il y a m consommateurs. Je noterai par x_{i1c} la consommation par le consommateur i du bien c à la date 1, et par $x_{i2c}(s)$ sa consommation du bien c à la date 2 en l'état s. Soit :

$$x_{i1} = \begin{bmatrix} x_{i11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{i1C} \end{bmatrix}, \qquad x_{i2}(s) = \begin{bmatrix} x_{i21}(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{i2C}(s) \end{bmatrix}, \qquad x_{i2}(.) = \begin{bmatrix} x_{i2}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{i2}(K) \end{bmatrix}.$$

Un *plan de consommation* pour i est un couple $x_i = [x_{i1}, x_{i2}(.)]$. Soit X_i^0 l'ensemble des plans réalisables pour i du point de vue physio-psychologique. Soit U_i la fonction de préférence pour i, c'est-à-dire une fonction numérique définie sur X_i^0. Sous certaines hypothèses, U_i peut être, par exemple, une espérance mathématique d'utilité (Savage, 1954), soit :

$$U_i(x_i) = \sum_{s \in S} \Phi_i(s)\, u_i[x_{i1},\ x_{i2}(s)], \tag{3.1}$$

où $\Phi_i(s)$ est la probabilité « personnelle » du consommateur i que l'état s soit réalisé et u_i est sa fonction d'utilité, définie sur l'ensemble des chroniques de consommation.

Ressources. — Il existe une quantité positive ou nulle de chaque bien, à chaque date, en chaque état, cette quantité étant déterminée d'une façon exogène. Je noterai par $\omega_{2c}(s)$ la quantité du bien c disponible à la date 2 en l'état s; ces quantités s'appelleront les ressources de l'économie. Soit :

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{1C} \end{bmatrix}, \qquad \omega_2(s) = \begin{bmatrix} \omega_{21}(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{2C}(s) \end{bmatrix}, \qquad \omega_2(.) = \begin{bmatrix} \omega_2(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_2(K) \end{bmatrix},$$

et

$$\omega = [\omega_1, \omega_2(.)].$$

Plus loin, je ferai l'hypothèse que les ressources totales de l'économie sont réparties entre les consommateurs, et je noterai par

$$\omega_i = [\omega_{i1}, \quad \omega_{i2} (.)]$$

les ressources qui appartiennent au consommateur i. Evidemment,

$$\sum_i \omega_i = \omega.$$

Contraintes physiques et techniques. — Un plan pour l'économie est un $(m + n)$ uple $[(x_i), (y_j)]$ formé par les plans de consommation et de production des divers agents. Un plan pour l'économie est *techniquement réalisable* si l'offre est égale à la demande et si les plans individuels sont techniquement réalisables, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i x_{i1c} + \sum_j a_{jc} = \omega_{1c}, \quad \text{pour tout } c, \\ &\sum_i x_{i2c}(s) = \sum_j b_{jc}(s) + \omega_{2c}(s), \quad \text{pour tout } c \text{ et tout } s, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

soit :

$$\sum_i x_i = \sum_j y_j + \omega; \tag{3.2'}$$

et

$$\left.\begin{aligned} &x_i \text{ appartient à } X_i^0, \quad \text{pour tout } i; \\ &y_j \text{ appartient à } Y_j^0, \quad \text{pour tout } j. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Information. — Conformément au principe défini dans le paragraphe 2, je noterai par $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{T}_j$ les partitions de S représentant les structures d'information du consommateur i et du producteur j respectivement.

Pour une partition $\mathcal{S}$ de S donnée, soit A $(\mathcal{S})$ l'ensemble des couples $[f_1, f_2(.)]$ où f_1 est un vecteur dans R^C (l'espace Euclidien de dimension C), et $f_2(.)$ est une fonction de S dans R^C compatible avec $\mathcal{S}$. Les couples de A$(\mathcal{S})$ correspondent à des plans qui ne supposent aucune autre information que celles contenues dans $\mathcal{S}$, puisque les actions de la seconde date sont bien définies sans que l'agent ait jamais à connaître autre chose que l'ensemble E de $\mathcal{S}$ auquel appartient l'état se réalisant.

Un plan x_i de consommation pour i est *réalisable par rapport à sa structure d'information* $\mathcal{S}_i$ si x_i appartient à A$(\mathcal{S}_i)$. Je dirai qu'un plan x_i est simplement *réalisable* pour i, s'il est à la fois techniquement réalisable et réalisable par rapport à $\mathcal{S}_i$, c'est-à-dire si :

$$x_i \text{ appartient à } X_i^0 \cap A(\mathcal{S}_i); \tag{3.4}$$

et de même pour un producteur j, y est dit réalisable si

$$y_j \text{ appartient à } Y_j^0 \cap A(\mathcal{T}_j). \tag{3.5}$$

Pour résumer, étant donné *la structure* $\mathcal{J}=(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_m, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$ *d'information pour l'économie, un plan* $[(x_i), (y_j)]$ *pour l'économie est réalisable* par rapport à $\mathcal{J}$ s'il satisfait les contraintes (3.2) et les contraintes

$$\left.\begin{array}{l} x_i \text{ appartient à } X_i = X_i^0 \cap A\ (\mathcal{S}_i), \quad \text{pour tout } i, \\ y_j \text{ appartient à } Y_j = Y_j^0 \cap A\ (\mathcal{C}_j), \quad \text{pour tout } j. \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

Optimum parétien. — Soit $\mathcal{U}\ (\mathcal{J})$ l'ensemble des vecteurs $[U_1(x_1), \ldots, U_m(x_m)]$ auxquels on peut associer des plans de production $y_i, \ldots, y_n$ tels que $[(x_i), (y_j)]$ soit un plan réalisable par rapport à $\mathcal{J}$. Un plan $[(x_i^*), (y_j^*)]$ définit un *optimum* par rapport à $\mathcal{J}$ s'il est réalisable par rapport à $\mathcal{J}$ et si $[U_1(x_1^*), \ldots, U_m(x_m^*)]$ est maximal dans $\mathcal{U}\ (\mathcal{J})$ (au sens vectoriel).

4. — SYSTÈME COMPLET DE MARCHÉS A TERME POUR LES LIVRAISONS CONDITIONNELLES

Etudions d'abord comment peut être représentée une économie dans laquelle existeraient des marchés à terme pour toutes les espèces de livraisons conditionnelles.

On considère un marché qui se tient *avant* la période initiale, marché où les contrats stipulent que telles ou telles quantités de biens seront livrées à condition que tel ou tel événement se produise. Tout payement est effectué avant la période initiale.

Un *système de prix*, p, est un couple $[p_{11}, p_{12}(.)]$, où

p_{11c} est le prix à payer *aujourd'hui* pour la livraison *aujourd'hui* d'une unité du bien c,

$p_{12c}(s)$ est le prix à payer *aujourd'hui* pour obtenir que, si l'état s se réalise, une unité du bien c soit livrée *demain*,

et

$$p_{11} = \begin{bmatrix} p_{111} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{11C} \end{bmatrix}, \qquad p_{12}(s) = \begin{bmatrix} p_{121}(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{12C}(s) \end{bmatrix}.$$

Un tel marché est une extension naturelle du concept du « marché statique » au cas où l'on distingue les « biens », non seulement selon leurs caractéristiques physiques, mais aussi selon la date de livraison et (pour la date 2) selon l'état de l'environnement au moment de la livraison. Notons encore l'expression du prix pour la livraison conditionnelle d'une unité du bien c à la date 2, livraison soumise à la condition que l'événement E se réalise; ce prix est égal à :

$$\sum_{s \in E} p_{12c}(s).$$

Le *revenu net* (ou bénéfice) associé au plan y_j pour le producteur j est égal à

$$r_j = p \cdot y_j = \sum_{s,\,c} p_{12c}(s)\, b_{jc}(s) - \sum_{c} p_{11c}\, a_{jc}. \tag{4.1}$$

Le *coût* d'un plan x_i du consommateur i est égal à :

$$p.x_i = \sum_c p_{11c}\, x_{i1c} + \sum_{s,c} p_{12c}(s)\, x_{i2c}(s). \tag{4.2}$$

On suppose que toutes les ressources appartiennent aux consommateurs; la valeur des ressources $\omega_i = [\omega_{i1}, \omega_{i2}(.)]$ du consommateur i est égale à :

$$p.\omega_i = \sum_c p_{11c}\, \omega_{i1c} + \sum_{s,c} p_{12c}(s)\, \omega_{i2c}(s). \tag{4.3}$$

On suppose également que toutes les entreprises appartiennent aux consommateurs : soit θ_{ij} la part du consommateur i dans l'entreprise j. La richesse totale du consommateur i est donc :

$$w_i = p.\omega_i + \sum_{j=1} \theta_{ij}\, p.y_j. \tag{4.4}$$

Équilibre. — Par rapport à une structure $\mathcal{J}$ d'information un équilibre du système complet des marchés à terme pour les livraisons conditionnelles est un $(m+n+1)$ — uple $[(x_i^*), (y_y^*), p^*]$ tel que

(i) pour $i = 1, \ldots, m$, $U_i(x_i^*)$ est un maximum de $U_i(x_i)$, soumis aux contraintes

$$x_i \in X_i,$$

$$p.x_i \leqslant w_i^* \equiv p^*.\omega_i + \sum_j \theta_{ij}\, p^*.y_j^*.$$

(ii) Pour $j = 1, \ldots, n$, $p^*.y_j^*$ est un maximum de $p^*.y_j$ soumis à la contrainte.

$$y_j \in Y_j;$$

(iii)

$$\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \omega.$$

Quelques observations sur l'optimum et l'équilibre. — Cette formulation se situe dans le cadre de la théorie générale de Debreu (1959) et l'on peut appliquer ses théorèmes sur l'existence de l'équilibre et sur la correspondance entre équilibre et optimum. En effet, la formulation que je viens de présenter est une extension du chapitre 7 de *Theory of Value* au cas où les différents agents peuvent avoir des structures d'information différentes (pour un exposé plus complet de cette extension, voir Radner, 1965). Je ne reprendrai pas ici en détail les théorèmes et leurs hypothèses et me bornerai à faire quelques observations sur l'interprétation de certaines hypothèses et sur des résultats particuliers dus aux hypothèses sur l'incertitude.

1° *L'hypothèse de convexité des préférences des consommateurs implique l'absence de préférence pour le risque* (voir Debreu, 1959, p. 101). Par contre, *le comportement des producteurs ne nécessite de leur part aucune attitude vis-à-vis du risque*, ce qui est évident d'après l'expression (4.1) du bénéfice d'un producteur.

2° *La monnaie et la liquidité ne jouent aucun rôle.* En effet, tout plan est déterminé au début de l'évolution de l'économie et tout payement est effectué également au début. Il ne reste ensuite qu'à exécuter les plans déjà déterminés. Bien entendu, si l'on voulait réaliser pratiquement de tels marchés, la détermination des plans exigerait une capacité de calcul largement supérieure aux capacités actuelles, à moins que les structures d'information ne soient très simples.

3° *Pendant l'évolution de l'économie, les agents ne reçoivent que des informations concernant l'environnement :* ils ne reçoivent aucune information concernant les actions des autres agents. L'introduction de ce dernier type d'information aurait pour effet d'introduire des « effets externes » (voir Radner, 1965).

4° On peut démontrer que les contrats pour les livraisons conditionnelles sont d'autant moins nombreux que les structures d'information des agents sont plus hétérogènes. L'échange net entre un ensemble d'agents et l'ensemble de tous les autres agents, ne peut être fonction que de l'information commune à ces deux ensembles d'agents (voir Radner, 1965).

5° *L'existence d'événements « subjectifs » soulève des difficultés.* Pour faire respecter un contrat de livraison qui est conditionnel par rapport à un événement, il faut que cet événement soit « objectivement vérifiable », c'est-à-dire qu'il soit indépendant des décisions des agents économiques et que cela soit objectivement vérifiable. Il n'en est pas ainsi pour beaucoup d'événements qui ont une importance économique. Il est par exemple difficile, après l'échec d'un programme de recherche ou de développement, de dissocier nettement les causes provenant de facteurs exogènes et les causes provenant des décisions des agents économiques.

5. — MARCHÉS AU COMPTANT

Au système complet de marchés à terme pour les livraisons conditionnelles, tel que je viens de le décrire, on peut opposer un tel système dans lequel existerait un marché au comptant pour chaque bien et pour chaque date, à l'exclusion de tout autre marché. Considérons maintenant ce nouveau système. Nous passerons dans les paragraphes suivants à une étude des situations intermédiaires qui constituent des combinaisons entre les deux systèmes extrêmes. Soit :

p_{11c} le prix à payer *à* la date 1 par unité du bien c livré à la date 1;

$p_{22c}(s)$ le prix à *payer à la date 2 en l'état* s par unité du bien c livré à la date 2 en l'état s.

Tout producteur aura un revenu net à chaque date; à la date 2 ce revenu dépendra de l'état réalisé :

$$r_{j1} = -\sum_c p_{11c}\, a_{jc} = -\, p_{11} . a_j,$$

$$r_{j2}(s) = \sum_c p_{22c}(s)\, b_{jc}(s) = p_{22}(s) . b_j(s), \text{ pour tout } s \in \mathrm{S}.$$

De même, les contraintes budgétaires pour un consommateur i sont :

$$p_{11}.x_{i_1} \leqq p_{11}.\omega_{i_1} + \sum_j \theta_{ij} r_{j_1},$$

$$p_{22}(s).x_2(s) \leqslant p_{22}(s).\omega_{i_2}(s) + \sum_j \theta_{ij} r_{j_2}(s).$$

Sans entrer dans une analyse détaillée d'un tel système de marchés (ce qui exigerait des hypothèses supplémentaires), on peut cependant faire quelques observations sur les comportements des agents qui sont envisageables :

1° Les agents économiques auront intérêt à stocker des biens pour spéculer sur les prix au comptant futurs. Mais notons que le stockage est une forme de production.

2° Au lieu de stocker des biens, un consommateur aura sans doute intérêt à garder une partie de son revenu d'aujourd'hui pour s'en servir demain, si cela est possible. Il y aura donc une demande pour la monnaie sous forme de dépôts à vue.

3° Il semble qu'il n'existe pas de comportement des producteurs qui puisse mener à un optimum. Les producteurs ne sont pas en mesure de comparer des revenus susceptibles d'échoir à des dates différentes ou en des états différents. Chaque actionnaire tentera d'influencer la gestion de l'entreprise afin de modifier le plan de production conformément à son attitude vis-à-vis du risque et à ses probabilités personnelles. De plus, les actionnaires auront intérêt à établir une bourse pour les actions, bourse qui aura pour but de modifier l'espérance de revenu des actionnaires à la date 2.

4° Les consommateurs auront intérêt à prévoir, à la date 1, les prix au comptant de la date 2. Mais ces derniers seront fonction de *s et des décisions des agents à la date 1.*

Les observations précédentes suggèrent certaines hypothèses, qui seront introduites dans le paragraphe suivant.

6. — SYSTÈME MIXTE COMPORTANT DES MARCHÉS AU COMPTANT ET DES MARCHÉS A TERME POUR LIVRAISON CONDITIONNELLE

Considérons à nouveau le système des marchés à terme pour la livraison conditionnelle (§ 4).

J'ai déjà noté que si les informations que reçoivent les agents sont différentes, le nombre des marchés à terme actifs est réduit. J'ai aussi noté que l'existence d'événements « subjectifs » empêche que toutes les structures d'information soient identiques.

Donc, pour diverses raisons, il existe des événements du point de vue économique à propos desquels on ne peut établir des contrats conditionnels. Et cependant, ces événements peuvent influencer les résultats de la production et les disponibilités en ressources. Dans ce cas, on aura donc intérêt à ajouter au système des marchés à terme :

1° Un marché au comptant à la date 2 pour chaque bien (un marché au comptant à la date 1 est effectivement compris dans le système des marchés à terme);

2° Une bourse à la date 1 pour les droits sur les revenus que recevront les producteurs à la date 2.

Les stratégies des divers agents économiques étant données, les prix d'équilibre sur les marchés au comptant de la date 2 sont fonction de l'état de l'environnement. Ces prix peuvent donc entrer dans la structure d'information de tout agent économique. Appelons *structure des prix* à la date 2 l'ensemble des fonctions reliant les prix à l'état de l'environnement.

Or, d'une part les stratégies optimales sont fonction des structures d'information, et, d'autre part, les structures d'information comprennent la structure des prix à la date 2, qui dépend des stratégies utilisées par les agents. De manière simplifiée, il existe un équilibre général des marchés si la structure des prix à la date 2 détermine des structures d'information pour lesquelles les décisions à la date 1 entraînent la structure donnée des prix à la date 2.

Dans ce paragraphe et le suivant, je précise ce concept d'équilibre et j'examine les conditions dans lesquelles un tel équilibre peut définir un optimum. Dans le dernier paragraphe, je présenterai quelques réflexions sur le rôle de la planification dans la recherche d'un équilibre.

Prix au comptant futurs et structures d'information. — Étant donné les décisions prises à la date 1, il existera des prix au comptant d'équilibre à la date 2, $p_{22c}(s)$, pour tout état $s \in S$. Ces prix seront *observables* à la date 2 *et peuvent être compris dans la structure d'information de tout agent.* On peut donc envisager l'établissement *à la date 1* de marchés à terme pour la livraison de biens (ou de monnaie) à la date 2, livraison soumise à la condition que tel ou tel vecteur de prix $p_{22}(s)$ se réalise (les contrats de travail comportant une indexation des salaires ou l'émission de bons indexés fournissent deux exemples de contrats conditionnels qui seraient conclus sur de tels marchés à terme). Appelons la *fonction* $p_{22}(.)$ la *structure des prix au comptant futurs.*

Soit $\mathcal{R}_i'$ la partition de S qui représente l'information que le consommateur i recevra à la période 2, et soit $\mathcal{R}_i$ la partition de S qui représente son « information objective », aucune des deux partitions ne tenant compte de la structure $p_{22}(.)$ des prix au comptant à la période 2. Il est évident que $\mathcal{R}_i'$ est au moins aussi fine que $\mathcal{R}_i$. Soit $\mathcal{J}[p_{22}(.)]$ la partition de S engendrée par $p_{22}(.)$ et soit :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_i \equiv \mathcal{R}_i * \mathcal{J}[p_{22}(.)], \\ \mathcal{S}_i' \equiv \mathcal{R}_i' * \mathcal{J}[p_{22}(.)], \end{cases} \tag{6.1}$$

où, pour deux partitions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$, la notation $\mathcal{R} * \mathcal{J}$ désigne la partition la moins fine qui est à la fois aussi fine que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$.

Tenant compte de l'information apportée par les prix au comptant à la date 2, $\mathcal{S}_i'$ représente l'information totale que i recevra à la date 2, et $\mathcal{S}_i$ son « information objective ».

Pour rappeler que $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_i'$ dépendent de la structure des prix au comptant $p_{22}(\cdot)$, j'utiliserai la notation $\mathcal{S}_i[p_{22}(.)]$ et $\mathcal{S}_i'[p_{22}(.)]$.

De même, soit $\mathcal{T}_j[p_{22}(.)]$ et $\mathcal{T}'_j[p_{22}(.)]$ les structures d'information, respectivement « objectives » et « totales », du producteur j, structures qui tiennent compte de l'information portée par $p_{22}(.)$.

On notera que, d'une part, seuls les événements dans $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{T}_j$ peuvent être utilisés en tant que conditions pour les contrats sur le marché à terme. D'autre part, il pourra y avoir des décisions prises à la date 2 qui seront compatibles avec $\mathcal{S}_i'$ mais non pas avec $\mathcal{S}_i$ (ou avec $\mathcal{T}_i'$ mais non pas avec $\mathcal{T}_i$).

Décisions et revenus des producteurs. — Une partie de l'output d'un producteur sera destinée au marché au comptant à la date 2, et l'autre partie à la réalisation des contrats sur le marché à terme. Ainsi, pour le producteur j, soit

a_j = le vecteur de ses inputs à la date 1;

$b_{j12}(s)$ = le vecteur de ses outputs à la date 2 en l'état s, outputs destinés à honorer ses contrats faits sur le marché à terme à la date 1;

$b_{j22}(s)$ = le vecteur de ses outputs vendus sur le marché au comptant à la date 2 en l'état s;

$b_j(s)$ = $b_{j12}(s) + b_{j22}(s)$ = son output total à la date 2 en l'état s.

Un plan pour j est un triplet

$$\widetilde{y}_j = [a_j, b_{j12}(.), \quad b_{j22}(.)].$$

Nous conservons la notation $y_j = [a_j, b_j(.)]$ pour le *plan de production* au sens strict. Le plan de production y_j doit respecter la contrainte :

$$y_j \in Y_j \equiv Y_j^0 \cap A(\mathcal{C}'_j[p_{22}(.)]. \tag{6.2}$$

De plus, les outputs prévus dans les contrats sur le marché à terme doivent respecter la contrainte :

$$b_{j12}(.) \quad \text{compatible avec } \mathcal{C}_j[p_{22}(.)]. \tag{6.3}$$

Le revenu du producteur j à la date 1 est égal à la valeur des outputs vendus sur le marché à terme, moins la valeur des inputs. Il y aura aussi un revenu à la date 2 en l'état s, provenant du marché au comptant.

$$r_{j1} = \sum_s p_{12}(s) \,.\, b_{j12}(s) - p_{11} \,.\, a_j,$$

$$r_{j2}(s) = p_{22}(s) \,.\, b_{j22}(s), \quad \text{pour tout } s.$$

Le revenu $r_{j2}(.)$ à la date 2, considéré comme fonction sur S, peut ne pas être compatible avec la partition $\mathcal{C}_j[p_{22}(.)]$. Si c'est le cas, le concept de bénéfice d'un producteur n'est pas définie de façon évidente. On verra plus loin que si $r_{j2}(.)$ est compatible avec $\mathcal{C}_j[p_{22}(.)]$, ce qui peut arriver sous certaines conditions, il existe un moyen d'évaluer à la date 1 le revenu aléatoire $r_{j2}(.)$ de la date 2 et il existe donc une définition naturelle du bénéfice.

Décisions, budgets et comportement des consommateurs. — Conservons la notation $x_i = [x_{i1}, x_{i2}(.)]$ pour le *plan de consommation* du consommateur i. Un tel plan doit respecter la contrainte :

$$x_i \in X_i \equiv X_i^0 \cap A(\mathcal{S}'_i[p_{22}(.)]. \tag{6.5}$$

La consommation nette de i à la date 2 en l'état s, soit $x_{i2}(s)$, est la somme des livraisons à la date 2 réalisées selon les contrats du marché à terme, des achats sur le marché au comptant à la date 2, et les ressources appartenantes à i à la date 2.

Ainsi soit :

ω_{i1} = le vecteur des ressources appartenant à i à la date 1;

$\omega_{i2}(s)$ = le vecteur des ressources appartenant à i à la date 2 en l'état s;

$z_i(s)$ = le vecteur des quantités de biens livrées à i à la date 2 en l'état s, selon les contrats du marché à terme.

Notons que les coordonnées de $z_i(s)$ peuvent être négatives. Le vecteur net des quantités achetées sur le marché au comptant à la date 2 en l'état s est égal à :

$$x_{i2}(s) - z_i(s) - \omega_{i2}(s). \tag{6.6}$$

Supposons encore que toutes les entreprises appartiennent aux consommateurs, et qu'il y a à la date 1 une bourse pour les actions donnant droit aux revenus que les producteurs recevront à la date 2. Ainsi soit :

θ_{ijt} = la part de l'entreprise j qui appartient au consommateur i à la date t ($t = 1, 2$);

σ_j = le prix attribué par la bourse, à la date 1, au droit portant sur la totalité des revenus qui seront réalisés à la date 2 par l'entreprise j.

Les parts θ_{ij1} sont données, comme les ressources, tandis que les parts θ_{ij2} sont vendues sur la bourse. Une part θ_{jt} donne droit, quelque soit l'état de l'environnement, à une fraction θ_{jt} du revenu que l'entreprise j réalisera à la date t. Le vecteur $\overline{\theta}_{i2} = (\theta_{i12}, \ldots, \theta_{in2})$ sera appelé le *portefeuille* du consommateur i.

Puisque le stockage des biens est considéré comme un type de production, les stocks conservés de la date 1 à la date 2 apparaissent dans les vecteurs $z_i(s)$. Le stockage des biens par un consommateur peut être représenté comme une activité de stockage par une entreprise qui appartient à ce consommateur, et qui vend le bien stocké à ce dernier sur le marché à terme.

Un *plan* du consommateur i est un quadruple $\widetilde{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}(.), z_i(.), \overline{\theta}_i]$. Outre la contrainte (6.5) sur le plan x_i de consommation, l'échange $z_i(.)$ sur le marché à terme doit respecter la contrainte suivante :

$$z_i(.) \text{ compatible avec } S_i[p_{22}(.)]. \tag{6.7}$$

Pour calculer la valeur de l'actif d'un consommateur à une date et en un état donnés, il faut distinguer la part de ses ressources de la date 2 qui peut être échangée à la date 1 sur le marché à terme. Il est naturel de supposer que $\omega_{i2}(.)$ est compatible avec $S'_i[p_{22}(.)]$, mais non pas forcément avec $S_i[p_{22}(.)]$. Donc étant donné $p_{22}(.)$ soit $\omega_{i12}(.)$ la plus grande fonction de S dans R^C qui à la fois est compatible avec $S_i[p_{22}(.)]$ et respecte la contrainte

$$0 \leqslant \omega_{i12}(s) \leqq \omega_{i2}(s), \quad \text{pour tout } s.$$

Il est évident que pour tout $E \in S_i[p_{22}(.)]$ et tout $s \in E$,

$$\omega_{i12}(s) = \min_{s' \in E} \omega_{i2}(s').$$

La fonction $\omega_{i12}(.)$ est la part de $\omega_{i2}(.)$ qui peut être valorisée sur le marché à terme et $\omega_{i22}(.) \equiv \omega_{i2}(.) - \omega_{i12}(.)$ est la part qui ne peut qu'être valorisée sur le marché au comptant à la date 2.

La richesse du consommateur i à la date 1 est égale à :

$$w_{i1} = p_{11} \cdot \omega_{i1} + \sum_{s} p_{12}(s)\, \omega_{i12}(s) + \sum_{j} \theta_{ij1}(r_{j1} + \sigma_j). \tag{6.9a}$$

La richesse de i à la date 2 en l'état s est égale à :

$$w_{i2}(s) = p_{22}(s) \cdot [z_i(s) + \omega_{i22}(s)] + \sum_{j} \theta_{ij2}\, r_{j2}(s). \tag{6.9b}$$

Les contraintes budgétaires pour i sont donc :

$$p_{11} \cdot x_{i1} + \sum_{s} p_{12}(s) \cdot z_i(s) + \sum_{j} \sigma_j\, \theta_{ij2} \leqq w_{i1}, \tag{6.10a}$$

$$p_{22}(s) \cdot x_{i2}(s) \leqq w_{i2}(s), \quad \text{pour tout } s. \tag{6.10b}$$

L'hypothèse sur le comportement des consommateurs est la suivante : étant donné tous les prix, le consommateur i chosit un plan $\widetilde{x}_i$ qui maximise $U_i(x_i)$ sous les contraintes (6.5), (6.7) et (6.10).

La fonction d'utilité indirecte. — Le problème de maximisation pour le consommateur, placé dans une situation de prix donnés, peut être décomposé en deux problèmes successifs :

(I) x_{i1}, $z_i(.)$, et $\overline{\theta}_{i2}$ étant donné, chosir $x_{i2}(.)$ de façon à maximiser $U_i[x_{i1}, x_{i2}(.)]$ sous les contraintes (6.5) et (6.10b).

Soit $\widetilde{U}[x_{i1}, w_{i2}(.)]$ le maximum qui en résulte. On appelle $\widetilde{U}_i$ *la fonction d'utilité indirecte* pour i.

(II) Choisir x_{i1}, $z_1(.)$, et $\overline{\theta}_{i2}$ de façon à maximiser $\widetilde{U}_i[x_{i1}, w_{i2}(.)]$ sous les contraintes (6.7) et (6.10a) (et avec la définition (6.9b) de $w_{i2}(.)$).

Assurances. — Soit $\mathcal{S}^*[p_{22}(.)]$ la partition la moins fine qui est à la fois aussi fine que toute partition $\mathcal{S}_i[p_{22}(.)]$ et $\mathcal{T}_j[p_{22}(.)]$. Pour simplifier les notations j'écrirai parfois $\mathcal{S}^*$ au lieu de $\mathcal{S}^*[p_{22}(.)]$.

Il est facile de démontrer qu'on peut toujours prendre $p_{12}(.)$ compatible avec $\mathcal{S}^*$. Il est évident que $p_{22}(.)$ est aussi compatible avec $\mathcal{S}^*$. De plus, une certaine relation doit exister entre $p_{12}(.)$ et $p_{22}(.)$ pour que l'arbitrage entre le marché à terme et le marché au comptant à la date 2 soit impossible, ceci étant une condition nécessaire pour qu'il puisse y avoir un équilibre, comme on le verra plus loin.

En effet :

Lemme. — Supposons que pour tout i la fonction d'utilité indirecte $\widetilde{U}_i$ soit strictement croissante en $w_{i2}(.)$. Dans ce cas, pour que le problème II ait une solution pour tout i, il faut qu'il existe une fonction numérique λ définie sur $\mathcal{S}^*$ telle que pour tout événement $E \in \mathcal{S}^*$ et tout état $s \in E$, on ait

$$p_{12}(s) = \lambda(E)\, p_{22}(s). \tag{6.11}$$

Démonstration. — Notons que $p_{12}(s)$ et $p_{22}(s)$ sont constantes sur E, puisqu'elles sont toutes les deux compatibles avec S^*. Il suffit de montrer que, si $p_{12}(s)$ et $p_{22}(s)$ n'étaient pas proportionnelles, un consommateur pourrait faire augmenter sans limite la valeur de $p_{22}(s).z_i(s)$ en tout état $s \in E$, et donc la valeur de $w_{12}(s)$, sans changer la valeur de $p_{12}(s)\, z_i(s)$. Ceci revient à démontrer que si deux vecteurs p' et p'' ne sont pas proportionnels, la valeur $p''.z$ n'est pas bornée sur l'ensemble des vecteurs z tels que $p'.z = 0$, ce qui est évident (rappelons que les composantes de $z_i(s)$ peuvent prendre n'importe quelles valeurs positives ou négatives).

A partir de la fonction λ, on peut définir un système de *primes d'assurances.* Pour tout ensemble $E \in S^*$, soit $|E|$ le nombre des états de E. Si un consommateur achète sur le marché à terme un vecteur z (des biens) qui sera livré à la date 2 en tout état s d'un événement $E \in S^*$, il paye $\sum_{s \in E} p_{12}(s).z$ à la date 1. Soit s_0 un état quelconque dans E. Par suite du lemme, et du fait que $p_{12}(s)$ et $p_{22}(s)$ sont constantes sur E,

$$\begin{aligned}\sum_{s \in E} p_{12}(s).z &= |E|\, p_{12}(s_0).z \\ &= |E|\lambda(E)\, p_{22}(s_0).z.\end{aligned} \tag{6.12}$$

Donc pour tout état $s \in E$,

$$p_{22}(s).z = \frac{\sum_{s \in E} p_{12}(s).z}{|E|\,\lambda(E)}. \tag{6.13}$$

Donc, en payant $|E|\lambda(E)$ sur le marché à terme à la date 1, on peut se garantir une unité de revenu en tout état s de E. Ainsi peut-on interpréter $|E|\lambda(E)$ comme *la prime pour une « assurance contre la réalisation de l'événement E à la date 2 ».*

Autrement dit, $|E|\lambda(E)$ est encore égale à la valeur actualisée à la date 1 d'une unité conditionnelle de revenu qui serait obtenue à la date 2 si l'événement E se réalisait.

7. — ÉQUILIBRE DANS UN SYSTÈME MIXTE

J'ai déjà fait remarquer, dans le paragraphe précédent, que le revenu $r_{j2}(.)$ d'un producteur j à la date 2 peut être en principe non-compatible avec la partition $\mathcal{C}_j[p_{22}(.)]$ qui représente son information objective à la date 2, et que, dans cette situation générale, il est difficile de donner une définition naturelle du bénéfice du producteur. Afin de présenter une définition assez générale de l'équilibre, définition qui s'applique encore si l'incompatibilité en question se présente, je suppose qu'il existe, pour chaque producteur j, une fonction V_j qu'il cherche à maximiser sur l'ensemble de ses plans.

Un *équilibre* est un $(m + n + 4)$ — *uple*

$$[(\widetilde{x}_i^*),\ (\widetilde{y}_j^*),\quad p_{11},\quad p_{12}(.),\quad p_{22}(.),\quad \sigma]$$

tel que

(*i*) pour tout $i = 1, \ldots, m$, $\widetilde{x}_i^*$ est un plan de consommateur i qui maximise $U_i(x_i^*)$ sous les contraintes (6.5), (6.7) et (6.10);

(*ii*) pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\tilde{y}_j^*$ est un plan pour le producteur j qui maximise $V_j(\tilde{y}_j^*)$ sous les contraintes (6.2) et (6.3);

(*iii*) l'offre est égale à la demande sur tous les marchés, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_i (x_{i1} - \omega_{i1}) + \sum_j a_j = 0, \\
&\sum_i [z_1(s) - \omega_{i12}(s)] = \sum_j b_{j12}(s), \quad \text{tout } s, \\
&\sum_i [x_{i2}(s) - \omega_{i2}(s)] = \sum_j b_j(s), \quad \text{tout } s, \\
&\sum_i \theta_{ij2} = 1, \quad \text{tout } j.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

Assurances contre les risques de production. — Si, pour des raisons spéciales, le revenu $r_{j2}(.)$ du producteur j à la date 2 est compatible avec $\mathcal{C}_j[p_{22}(.)]$, il existe alors une définition naturelle du bénéfice du producteur, soit :

$$r_j = r_{j1} + \sum_{E \in \mathcal{S}^*} \lambda(E) \sum_{s \in E} r_{j2}(s), \qquad (7.2)$$

où r_{j1} et $r_{j2}(s)$ sont les revenus définis par les équations (6.4) et λ est la fonction dont l'existence est signalée par le lemme du paragraphe 6.

Dans ce cas, je suppose que chaque producteur cherche à maximiser son bénéfice, c'est-à-dire que $V_j(\tilde{y}_j) = r_j$.

En particulier, je dirai que, étant donné une structure $p_{22}(.)$ des prix au comptant à la date 2, *les risques de production du producteur j sont assurables* si, pour tout plan de production y_j,

$$y_j \in Y_j^0 \cap A(\mathcal{C}'_j[p_{22}(.)])$$

implique

$$y_j \in Y_j^0 \cap A(\mathcal{C}_j[p_{22}(.)]).$$

Dans ce cas là, il est évident que le revenu $r_{j2}(.)$ est compatible avec la partition $\mathcal{C}_j[p_{22}(.)$. Un cas encore plus particulier est celui où, après avoir tenu compte de la structure des prix $p_{22}(.)$, *les structures d'information objectives et subjectives sont identiques, soit*

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{S}_i[p_{22}(.)] = \mathcal{S}'_i[p_{22}(.)], \\
&\mathcal{C}_j[p_{22}(.)] = \mathcal{C}'_j[p_{22}(.)].
\end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

En ce cas là je dirai que *les prix $p_{22}(.)$ rendent objective toute l'information.* Comme je viens de le remarquer, les bénéfices des producteurs sont bien définis. En outre, il y a pour chaque consommateur une définition naturelle de sa richesse totale actualisée, soit :

$$w_i = w_{i1} + \sum_{E \in \mathfrak{F}^*} \lambda(E) \sum_{s \in E} w_{i2}(s). \tag{7.4}$$

Équilibre et optimum. — Je considèrerai dans plusieurs cas la question de l'optimalité ou de la non-optimalité d'un équilibre.

Le cas le plus favorable est celui où les prix d'équilibre $p_{22}(.)$ rendent objective toute l'information. Dans ce cas, étant donné les prix d'équilibre, on se trouve dans le cadre du paragraphe 4, et (sous les conditions bien connues) un équilibre définit un optimum *par rapport à la structure d'information*

$$\left[(\mathcal{S}_i[p_{22}(.)]), (\mathcal{T}_j[p_{22}(.)])\right] = \mathfrak{J}[p_{22}(.)].$$

Dans ce cas, on peut vraiment parler de *l'efficacité du système des prix considéré comme système d'information.*

Dans le cas d'un équilibre où seuls les risques de production des producteurs sont assurables, on ne peut plus parler d'un véritable optimum dans le sens du paragraphe 3. Pourtant pour tout s, étant donné les ressources $\omega_{i2}(s)$, les outputs $b_j^*(s)$, et les consommations antérieures x_{i1}^*, les consommations $\{x_{i2}^*(s)\}$ constituent un optimum. D'autre part, étant donné les ressources ω_{i1}, $\omega_{i2}(.)$, *l'institution du marché au comptant à la date 2, la structure* $p_{22}(.)$ *des prix au comptant à la date 2, et les structures d'information* $\mathcal{S}_i[p_{22}(.)$. *et* $\mathcal{T}_j[p_{22}(.)]$, les plans $\{(x_{i1}), (z_i[.]), (a_j), (b_j[.]\}$ constituent un optimum par rapport à ces structures d'information. Cette dernière propriété est évidente à partir de la formulation du problème II du consommateur (voir paragraphe 6), si l'on se rappelle que, dans ce cas, les outputs et les revenus des producteurs sont compatibles avec ses structures d'information objectives $\mathcal{T}_j[p_{22}(.)]$, donc que les bénéfices sont bien définis à la date 1. Puisque les bénéfices sont définis à la date 1, il n'y aura pas d'intérêt à échanger les actions sur la bourse : on peut donc, sans perte de généralité, poser $\theta_{ij2} = \theta_{ij1} \equiv \theta_{ij}$ pour tout i et j. Son portefeuille $\bar{\theta}_i$ étant déterminé, il ne reste au consommateur à la date 1 qu'à déterminer les décisions x_{i1}, $z_i(.)$. Sa fonction d'utilité indirecte peut être considérée comme fonction de ces dernières variables, et sa contrainte budgétaire écrite sous la forme

$$p_{11}.x_{i1} + \sum_s p_{12}(s).z_i(s) \leqslant p_{11}.\omega_{i1} + \sum_s p_{12}(s).\omega_{i12}(s) + \sum_j \theta_{ij} r_j. \tag{7.5}$$

Puisque $\mathcal{T}_j[p_{22}(.)] = \mathcal{T}'_j[p_{22}(.)]$, la distinction entre $b_{j12}(.)$ et $b_{j22}(\cdot)$ n'est plus essentielle. Effectivement, tout l'output d'un producteur peut être, en principe, vendu sur le marché à terme. Il ne reste à la date 2 qu'à faire des échanges purs entre consommateurs sur le marché au comptant.

Dans le cas général, je n'ai pas trouvé des critères V_j pour les producteurs qui conduisent à un optimum. Néanmoins, on peut démontrer que, *étant donné les plans* y_j^* *des producteurs,* la bourse pour les actions θ_{ij2} conduit à un optimum pour la répartition entre les consommateurs des revenus aléatoires des producteurs.

Existence d'un équilibre. — Il n'est pas évident qu'un équilibre du type défini plus haut existe même sous les hypothèses classiques. La continuité des fonctions de demande pourrait être détruite en principe, du fait que l'information dépend de la structure des prix au comptant à la période 2.

8. — QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LE ROLE DE LA PLANIFICATION INDICATIVE

L'équilibre des marchés à terme et au comptant exige une prévision de la structure des prix au comptant futurs. Cette prévision doit revêtir la forme de *fonction*, qui précise les prix futurs en fonction de l'état de l'environnement. En effet, dans l'extension de cette théorie au cas de plus de deux périodes, il faut envisager à chaque période, un marché au comptant et des marchés à terme, donc des systèmes de prix $p_{tt'}(.)$, où $p_{tt'}\,c(s)$ dénote le prix à payer à la période t, pour une unité du bien c qui sera livrée à la période t', à condition que l'état s se réalise.

Un tel système de prévisions dépasse évidemment les capacités des agents économiques individuels, il est loin d'être réalisé par les plans indicatifs actuels, et il est impossible à réaliser en détail. Néanmoins, la théorie indique une direction de développement souhaitable pour les plans indicatifs. *Ces plans doivent esquisser, non pas seulement les prévisions univoques des prix futurs, mais aussi des prévisions conditionnelles par rapport aux événements futurs,* et surtout conditionnelles par rapport aux événements qui ne sont pas couverts par les assurances normales. L'intérêt d'une telle intervention du gouvernement n'est pas surprenant si l'on comprend qu'il y a des « économies » ou « déséconomies externes » entre les plans individuels.

Un aspect important de cette théorie est le rôle que jouent les prix dans la structure d'information. Les stratégies (ou les habitudes !) des agents étant données, les prix futurs sont fonction de l'état de l'environnement et peuvent en principe intervenir en tant que conditions dans les contrats sur les marchés à terme conditionnels. La théorie suggère donc que l'on attribue un plus grand rôle aux assurances sur la structure des prix futurs (ou bien aux salaires indexés, bons indexés, etc...).

Dans la mesure où les événements futurs sont objectivement vérifiables, l'extension des marchés à terme ainsi que le développement des prévisions conditionnelles, peuvent conduire à une meilleure répartition des risques et à une évolution de la production à la fois plus efficace, plus cohérente et plus décentralisée. Mais dans la mesure où ces événements sont « subjectifs », d'après le sens précisé dans cet article, les marchés ne semblent pas donner une solution optimale au problème du choix des investissements en avenir aléatoire.

RÉFÉRENCES

K. J. ARROW (1953). — Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques *Econométrie,* Paris (C. N. R. S.), pp. 41-48.

G. DEBREU (1959). — *Theory of Value,* New York, Wiley.

P. MASSE (1965). — *Le Plan, ou l'Anti-hasard,* Paris, Gallimard.

R. RADNER (1967). — Competitive equilibrium under uncertainty, *Econometrica,* Vol. 35, No 3.

L. J. SAVAGE (1954). — *Foundations of Statistics,* New York, Wiley.